20/11/2018

$W \leq V$ και $W' \leq V$ με $\{\bar{0}\} = W \cap W'$ και $W + W' \leq V \Rightarrow$
$\Rightarrow W, W'$ συμπληρωματικοί.

Ή ο W συμπλήρωμα του W', $W \cap W' = \{0\} \Rightarrow W + W'$ είναι ευθύ

$$W \oplus W'$$

Πρόταση: Έστω $W \leq V$ και S μια βάση του W. Τότε η S επεκτείνεται σε βάση του V. Δηλαδή $\exists S' : S \subseteq S'$ και S' είναι βάση του V.

Απόδειξη: Έστω $S = \{v_1, \dots, v_k\}$, θα δημιουργήσουμε ένα S': $S \leq S'$ και S' βάση του V. Αν $W \lneq V \Rightarrow \exists u_1 \in V - W$. Τότε $S_1 = S \cup \{u_1\}$ είναι γραμμ. ανεξ.

Έστω $W_1 = \langle S_1 \rangle$

Αν $W_1 = V \Rightarrow S_1$ βάση του V. Αν $W_1 \subsetneq V \Rightarrow \exists u_2 \in V - W_1$
Ορίζουμε $S_1 = S \cup \{u_2\}$ γρ. ανεξ. και συνεχίζουμε με αυτόν τον τρόπο μέχρι να φτάσουμε στον V. Δηλαδή θα βρούμε διανύσματα $u_1, \dots, u_n$ ώστε $S \cup \{u_1, \dots, u_n\}$ είναι γρ. ανεξάρτητο και γεννά το V.

Πόρισμα

Για κάθε υπόχωρο $W \leq V$ υπάρχει ευθύ συμπλήρωμα W'. $W \oplus W' = V$

Απόδειξη

Έστω S βάση του W και S' $S \cup \{u_1, \dots, u_n\}$ η επέκταση σε βάση του V

Ορίζουμε το $W' = \langle u_1, \dots, u_n \rangle$ τότε $W \cap W' \{\bar{0}\}$ και $W + W' = V$

Θεώρημα

Έστω V δ.χ. και $M, N \leq V$

1) Αν $M \leq V$, τότε $\dim M \leq \dim N$

2) $\dim(M+N) + \dim(M \cap N) = \dim M + \dim N$

Απόδειξη

1) Έστω $S = \{v_1, \dots, v_k\}$ βάση του M.
Το S μπορεί να επεκταθεί σε S' βάση του N
Επειδή $S \subseteq S' \Rightarrow \dim M \leq \dim N$

2) $M \cap N \leq M, N, V$
Έστω $\{v_1, \dots, v_n\}$ μια βάση του $M \cap V$.
Δημιουργούμε βάση του M και του N από την επέκταση του $\{v_1, \dots, v_k\}$.

$M = \langle v_1, \dots, v_k, u_1, \dots, u_n \rangle \Leftrightarrow \dim M = k+n$

$N = \langle v_1, \dots, v_k, w_1, \dots, w_n \rangle \Leftrightarrow \dim N = k+l$

Θέλουμε $\dim(M+N) + \cancel{k} = \cancel{k} + n + k + l \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \dim(M+N) = k+n+l$

Αρκεί ν.δ.ο. το σύνολο $\{v_1, \dots, v_k, u_1, \dots, u_n, w_1, \dots, w_n\}$ αποτελεί βάση του $M+N$. Το τυχαίο στοιχείο του $M+N$ το $v+w$ με $v \in M$ και $w \in N$

$v \in M \Rightarrow v = a_1 v_1 + \dots + a_k v_k + b_1 u_1 + \dots + b_n u_n$

$w \in N \Rightarrow \underline{w = a_1' v_1 + \dots + a_k' v_k + \gamma_1 w_1 + \dots + \gamma_n w_n}$ (+)

$v+w = (a_1 + a_1') v_1 + \dots + (a_k + a_k') v_k + b_1 u_1 + \dots + b_n u_n + \gamma_1 w_1 + \dots + \gamma_n w_n$

Άρα πράγματι γεννά το άθροισμα $M+V$. Αρκεί ν.δ.ο. είναι γραμμ. ανεξ.

$S = a_1 v_1 + \dots + a_k v_k + b_1 u_1 + \dots + b_n u_n + \gamma_1 w_1 - \dots - \gamma_l w_l$

$= \underbrace{a_1 v_1 + \dots + a_k u_k + b_1 u_1 + \dots + b_n u_n}_{\in M}$

$-\gamma_1 w_1 - \dots - \gamma_l w_l \in M \cap N \Rightarrow \exists \delta_1, \dots, \delta_k$ ώστε

$-\gamma_1 w_1 - \dots - \gamma_l w_l = \delta_1 v_1 + \dots + \delta_k v_k \Rightarrow \bar{0} = \delta_1 v_1 + \dots + \delta_k v_k + \gamma_1 w_1 + \dots + \gamma_p w_p$

$\Rightarrow$

γρ. ανεξάρτητο

$\delta_1 = \delta_2 = \dots = \delta_k = 0 = \gamma_1 = \dots = \gamma_p$